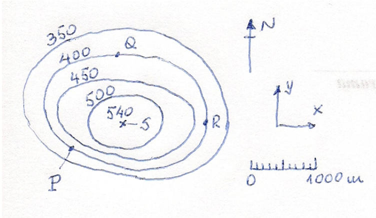
FÍSICA MODERNA - 1/2011

LISTA 10

1. Uma montanha pode ser descrita por uma função $h(x, y)$, que dá a altura acima do nível do mar de um ponto que está x a leste e y ao norte da origem O. A figura abaixo mostra curvas de nível desta função. Estime os valores de $\partial h/\partial x$ e $\partial h/\partial y$ nos pontos P, Q, R, e no pico S. As escalas para x e y e o valor da função nas curvas de nível são dadas em metros.



2. (a) Considere uma partícula de massa M numa caixa rígida bi-dimensional de lados a e b,. Use o método de separação de variáveis para determinar as energias permitidas e as funções de onda dos estados estacionários deste partícula. Em particular, mostre que as energias permitidas são identificadas por dois números quânticos n_x e n_y e têm a forma

$$E_{n_x,n_y} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2M}(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2}).$$

O principal objetivo deste problema é fazer com que você repita por você mesmo a análise feita em aula e que compreenda como o resultado lá obtido se generaliza para caixas retangulares.
(b) Considere uma partícula numa caixa retangular rígida de lados a e $b = a/2$. Use o resultado do item (a) e encontre os seis níveis de energia mais baixos com seus números quânticos e sua degenerescência.
(c) Considere o estado com números quânticos $n_x = 1$ e $n_y = 2$ para a partícula na caixa rígida bidimensional quadrada. Escreva $|\psi|^2$. Perto de que pontos da caixa será mais provável encontrar esta partícula? Esboce as curvas de nível que correspondem aos pontos onde a densidade de probabilidade seja máxima, igual a 75%, 50% e 25%. Indique a posição da(s) linha(s) nodal (nodais).

3. (a) Considere uma partícula de massa M numa caixa rígida tridimensional de lados a, b e c,. Use o método de separação de variáveis para determinar as energias permitidas e as funções de onda dos estados estacionários deste partícula. Em particular, mostre que as energias permitidas são identificadas por três números quânticos n_x, n_y e n_z e têm a forma

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2M}(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2}).$$

(b) Considere uma caixa cúbica rígida tridimensional ($a = b = c$). Determine os oito níveis de energia mais baixos. Faça um diagrama de níveis de energia para estes níveis mostrando seus números quânticos, energias e degenerescências.

4. Considere o sistema de coordenadas polares em duas dimensões, no qual r é a distância até a origem e ϕ é o ângulo entre o eixo cartesiano x e o vetor posição $\vec{r}$.
(a) Escreva as equações que determinam as coordenadas cartesianas x e y em função das coordenadas polares r e ϕ.

(b) Use a regra da cadeia para funções escalares de 2 variáveis para determinar as quatro derivadas parciais $\partial x/\partial r$, $\partial y/\partial r$, $\partial x/\partial \phi$ e $\partial y/\partial \phi$.
(c) Use a regra da cadeia já mencionada e os resultados anteriores para determinar as derivadas $\partial \psi/\partial r$, $\partial \psi/\partial \phi$, $\partial^2 \psi/\partial r^2$, e $\partial^2 \psi/\partial \phi^2$ em termos das derivadas parciais da função de onda espacial ψ em relação às coordenadas cartesianas.
(d) Substitua os resultados encontrados no item (c) do lado direito da identidade abaixo e mostre que obtemos o seu lado esquerdo.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}$$

5. Um ponto P da superfície terrestre tem coordenadas cartesianas (x, y, z) e coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), com as coordenadas definidas de forma que a origem esteja no centro da Terra e que o eixo z aponte para o norte geográfico. Quais são as coordenadas cartesianas e esféricas do ponto Q que está diametralmente oposto a P?

6. Considere o problema quântico tri-dimensional que consiste em buscar as soluções estacionárias e separáveis para uma partícula de massa M sujeita a uma força central, expressas em coordenadas esféricas.
(a) Refaça o raciocínio exposto em aula e obtenha as equações diferenciais ordinárias que devem ser satisfeitas pelas funções $R(r)$, $\Theta(\theta)$ e $\Phi(\phi)$.
(b) Considere o caso especial $l = m = 0$. Verifique que as funções $\Theta =$ constante e $\Theta = ln[(1 + cos\theta)/(1 - cos\theta)]$ são soluções da equação em θ, mas que a segunda não é fisicamente aceitável.
(c) Considere o caso especial $l = m = 1$. Verifique que a função $\Theta = sen\theta$ é solução da equação em θ. (Todas as outras soluções são infinitas quando $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, portanto esta é a única solução fisicamente aceitável.) Escreva a parte angular da solução completa, mostrando sua dependência explícita em θ e ϕ quando $l = m = 1$, e quando $l = 1$ e $m = -1$. Fixe o valor de r: em que direção $|\psi|^2$ é máximo nestes dois estados?

7. Considere a solução quântica do problema do átomo de hidrogênio.
(a) Prove que a degenerescência do nível n é n^2. (Na verdade este número será dobrado quando considerarmos o efeito do spin do elétron.)
(b) Suponha que saibamos que um átomo de hidrogênio tem valor bem definido do número quântico l. O que isto nos diz a respeito de seu momento angular? Quais são os valores de energia consistentes com esta informação?
(c) Suponha que saibamos que um certo átomo de hidrogênio tem valores bem definidos $n = 5$ e $m = 2$ para estes dois números quânticos. Quantos estados diferentes são compatíveis com esta informação? Generalize este resultado, e responda à mesma pergunta para valores arbitrários de n e m.